Schulaufgabe aus der Mathematik **Name:** Musterlösung

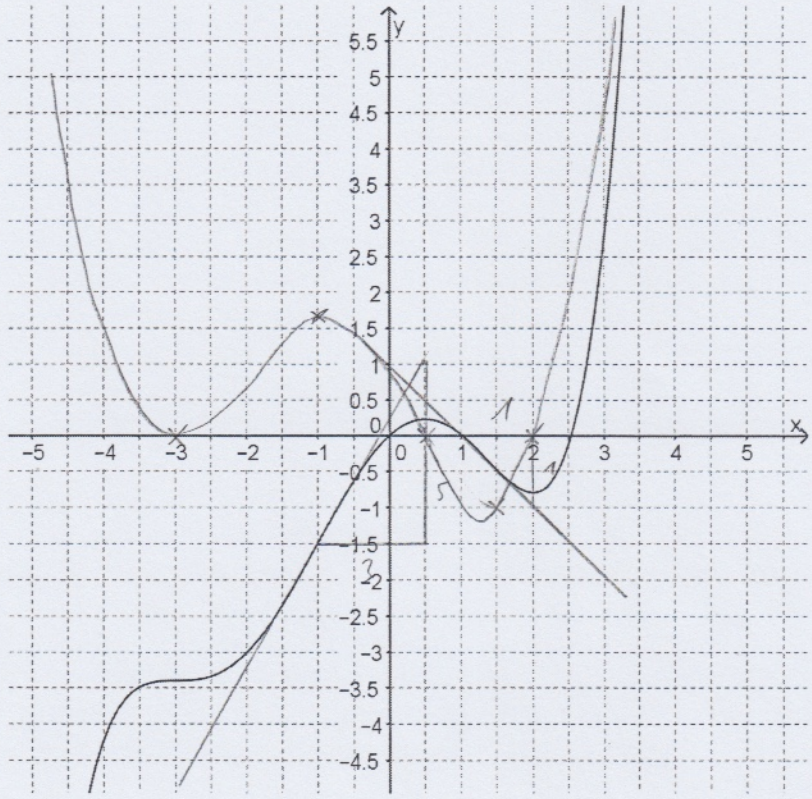
Q11 - m_3 Teil A – ohne Hilfsmittel Datum: 22.01.18

Alle Lösungen müssen nachvollziehbar sein. Die BEs sind als Richtwerte zu verstehen.

1. Zeichnerisches

K4

Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion f.



a) Geben Sie die x-Werte an, für die der Graph G_f eine waagrechte Tangente besitzt. 3 BE

b) Ermitteln Sie graphisch die Tangentensteigung an den Stellen $x_1=-1$ und $x_2=1.5$. 3 BE

c) Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f ' – so genau wie möglich (auch b) verwenden) – farbig (nicht rot oder grün!) in das Koordinatensystem ein. 5 BE

2. Wahr oder falsch? 4 BE

Schreiben Sie für wahre Aussagen ein w und für falsche Aussagen ein f in das entsprechende Kästchen. Falsche Aussagen sind dabei durch ein geeignetes Gegenbeispiel zu widerlegen. Hinweis: Für falsche Antworten werden Bewertungseinheiten abgezogen und unausgefüllte Kästchen werden nicht bewertet.

K5

$\boxed{w}$ Wenn man die Ableitung einer quadratischen Funktion ableitet, erhält man eine konstante Funktion.

$\boxed{f}$ Eine Funktion, die für alle $x\in\mathbb{R}$ positiv ist, besitzt eine Ableitungsfunktion, die ebenfalls für alle $x\in\mathbb{R}$ positiv ist.

3. Vektoren

K5

Gegeben sind die Punkte A(1 | 2 | 3) und B(-3,5 | 1,7 | 2) sowie der Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1,5\\3\\-2\end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A', der aus A durch Verschiebung um $\vec{v}$ entsteht. 3 BE

b) Geben Sie die Koordinaten von B* an, der aus B durch Spiegelung an der x_2-Achse entsteht. 2 BE

Mathematik

22.01.18 1. Schulaufgabe Q11 – m_3

Musterlösung – Teil A

1a) $x_1 = -3$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 2$

b) $m_1 = \underline{\underline{\frac{5}{3}}} \approx 1{,}7$; $m_2 = \underline{\underline{-1}}$

c) siehe Angabenblatt

2.) Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 + 1$ hat $\mathbb{W} = [1; +\infty[$

$f'(x) = 2x$ hat $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

3.) a) $A(1|2|3)$; $B(-3{,}5|1{,}7|2)$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{A'(-0{,}5|5|1)}}$

b) $\underline{\underline{B^*(3{,}5|1{,}7|-2)}}$

Musterlösung – Teil B

1.) a) $h(x) = (x-1)(x-4)$ K5

$h'(x) = (x-4) + (x-1) = \underline{\underline{2x-5}}$

b) $g_k(a) = \frac{a^2+2}{3a-k}$

$\frac{d}{da} g_k(a) = \frac{(3a-k)\cdot 2a - (a^2+2)\cdot 3}{(3a-k)^2} = \frac{6a^2 - 2ak - (3a^2+6)}{(3a-k)^2}$

$= \frac{6a^2 - 2ak - 3a^2 - 6}{(3a-k)^2} = \underline{\underline{\frac{3a^2 - 2ak - 6}{(3a-k)^2}}}$

c) $k(t) = \frac{-2}{3+t}(t^2-9) = \frac{-2}{\cancel{3+t}}\cancel{(t+3)}(t-3)$

$= -2(t-3) = -2t+6$

$\frac{d}{dt} k(t) = \underline{\underline{-2}}$

2.) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{(x-1)^2}$

a) Definitionsmenge: $(x-1) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1$ Pol 2. Ordnu.

$\underline{\underline{\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}}}$

SP mit x-Achse: $f(x) \overset{!}{=} 0$

$x^2 - 2 = 0 \quad | +2$

$x^2 = 2 \quad | \sqrt{\;}$

$x_1 = \sqrt{2}\ ;\ x_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{S_{x_1}(\sqrt{2}|0)}}\ ;\ \underline{\underline{S_{x_2}(-\sqrt{2}|0)}}$

SP mit y-Achse: $f(0) = \dfrac{-2}{(-1)^2} = -2 \Rightarrow \underline{\underline{S_y(0|-2)}}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\Rightarrow$ waagrechte Tangente $\underline{\underline{y = 1}}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2-2}{(x-1)^2} \text{ "}=\text{" } \dfrac{-1}{0^+} = \underline{\underline{-\infty}}$ $\Rightarrow$ senkrechte Asymptote $\underline{\underline{x = 1}}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{x^2-2}{(x-1)^2} \text{ "}=\text{" } \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

c) $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 \cdot 2x - (x^2-2)(2x-2)}{(x-1)^4}$

$= \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 2x - (2x^3 - 2x^2 - 4x + 4)}{(x-1)^4}$

$= \underline{\underline{\dfrac{-2x^2 + 6x - 4}{(x-1)^4}}}$

d) $f'(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x - 4 = 0 \quad | : (-2)$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$;

$x_1 = 2\ ;\ (x_2 = 1)$

Monotonieverhalten:

f'	$-$	$+$	$-$
G_f	smf	sms	smf
		$1 \notin D$	2 Max

$$f(2) = \frac{4-2}{(2-1)^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{H(2|2)}} \quad \text{Hochpunkt}$$

e.) $f(5) = \dfrac{25-2}{4^2} = \dfrac{23}{16}$; $f'(5) = \dfrac{30-50-4}{4^4} = -\dfrac{3}{32}$

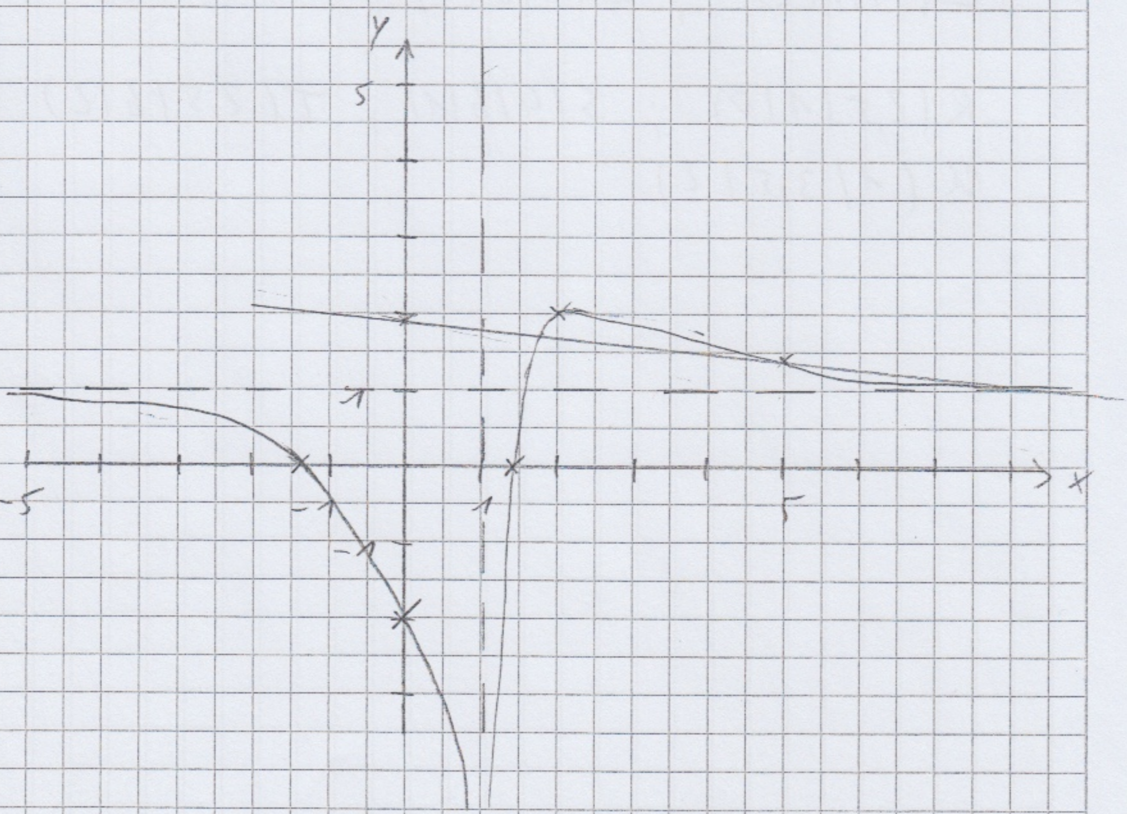
$$\frac{23}{16} = -\frac{3}{32} \cdot 5 + t_0 \quad \left| + \frac{15}{32}\right.$$

$$t_0 = \frac{61}{32}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{t: y = -\frac{3}{32}x + \frac{61}{32}}} \quad ; \quad \underline{\underline{t: y = -0{,}1x + 1{,}9}}$$

K4

f.)



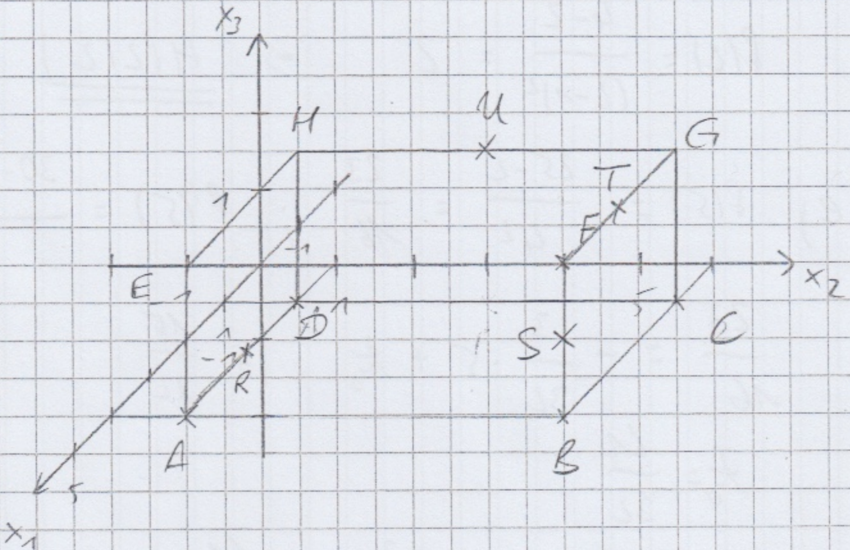
3.) Ausgehend von einem Startwert für die x-Koordinate x_0 wird die vermutete Nullstelle von f durch die Nullstelle der Tangente in x_0 an G_f angenähert. Diese Nullstelle x_1 der Tangente bildet die Grundlage für die nächste

K1

Anwendung des beschriebenen Verfahrens.
Die Methode versagt, wenn man an einen Extremwert gelangt, da die Tangente dann keinen SP mit der x-Achse besitzt.

K4

4.)



A(4|1|0) ; B(4|6|0) ; C(1|6|0)
E(4|1|2) ; G(1|6|2) ; H(1|1|2)

R(2,5|1|0) ; S(4|6|1) ; T(2,5|6|2)
U(1|3,5|2)