Ab: 2018 – Geometrie – A

Aufgabengruppe 1

1.) $M(1|4|0)$; $r = 6$; $P(5|1|p)$

a) Kugelgleichung: $k: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 + x_3^2 = 36$

$P \in k: \quad (5-1)^2 + (1-4)^2 + p^2 = 36$

$16 + 9 + p^2 = 36 \quad | -25$

$p^2 = 11$

$\underline{\underline{p_1 = \sqrt{11}}}\ ; \ \underline{\underline{p_2 = -\sqrt{11}}}$

b) $B(-3|8|2)$

„Berührt" $\Rightarrow g \perp \overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 8-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{r}_g \perp \overrightarrow{MB} \Rightarrow \vec{r}_g \circ \overrightarrow{MB} = 0$

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -4r_1 + 4r_2 + 2r_3 = 0$

Wähle $r_3 = 0 \Rightarrow -4r_1 + 4r_2 = 0 \quad | +4r_1$

$4r_2 = 4r_1 \quad | :4$

$\underline{\underline{r_2 = r_1}}$

Wähle $r_1 = r_2 = 1$

$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.) $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: x_3 = 0$

g_a in $E: \quad 4 + \lambda = 0 \quad | -4$

$\lambda = -4$

in $g_a: \quad \vec{S}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-8 \\ a-4+8 \\ 4-4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -6 \\ a+4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{S_a(-6|a+4|0)}}$

b) x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$

$2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

$a - 4 - 2\lambda = 0 \Rightarrow a - 4 + 2 = 0 \quad | +2$

$\underline{\underline{a = 2}}$

$4 + \lambda = s$

$s = 4 - 1 = 3$

$\underline{\underline{S_{x_3}(0|0|3) \text{ für } a = 2}}$

Aufgabengruppe 2

1.) $A(1|1|1)$; $B(0|2|2)$; $C(-1|2|0)$

a) $E: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -2-1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{E: \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0}}$

$-2x_1 - 3x_2 + x_3 - (-2 - 3 + 1) = 0$

$\underline{\underline{E: -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4 = 0}}$

b) SP mit x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$

$0 - 3x_2 + 0 + 4 = 0 \quad | -4$

$-3x_2 = -4 \quad | :(-3)$

$\underline{\underline{x_2 = \frac{4}{3}}} \Rightarrow \underline{\underline{S_{x_2}(0|\tfrac{4}{3}|0)}}$

2.) $A(0|0|0)$; $B(3|-6|6)$; $F(2|-4|4)$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$h \cap g: \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$-2\lambda = 3\mu \quad (\mathrm{I})$

$-4 = -6\mu \quad | :(-6)$

$\underline{\underline{\mu = \frac{2}{3}}}$

$5 + \lambda = 6\mu \quad | -5$

$5 + \lambda = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \quad | -5$

$\underline{\underline{\lambda = -1}}$

Probe in (I): $-2 \cdot (-1) = 3 \cdot \frac{2}{3}$

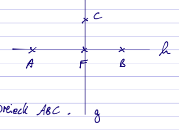
$2 = 2$ ✓

λ in $g: \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ -4 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ✓

$\vec{r}_g \circ \vec{r}_h = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = -6 + 0 + 6 = 0$ ✓

$\Rightarrow \vec{r}_g \perp \vec{r}_h$

c) Skizze:



[CF] ist die Höhe auf die Strecke [AB] im Dreieck ABC.

Geometrie – Teil A (nicht ausgeteilt)

Aufgabengruppe 1

1.) $E: x_2 - 3x_3 = -19$; $P(1|2|2)$; $Q(1|-1|11)$

$S(-2|-4|5)$

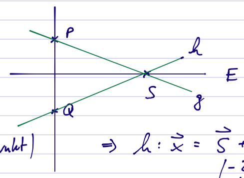
a) $S \in E: \quad -4 - 3\cdot 5 = -19$ ✓

b) $PQ: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-2 \\ 11-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_{PQ}}$

$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\, \vec{r}_{PQ} \Rightarrow$ linear abhängig

$\Rightarrow PQ \perp E$ ✓

c) Skizze:



P wird an E gespiegelt → Q

S liegt in E (Fixpunkt)

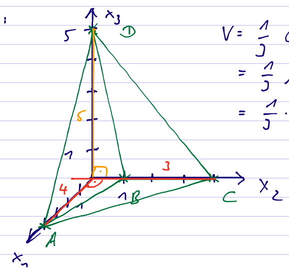
$\Rightarrow h: \vec{x} = \vec{S} + \lambda \cdot \overrightarrow{SQ}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+2 \\ -1+4 \\ 11-5 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

2.) $A(4|0|0)$; $B(0|1|0)$; $C(0|4|0)$; $D(0|0|5)$

a) Skizze:



$V = \frac{1}{3}\, G \cdot h$

$= \frac{1}{3}\, A_\Delta \cdot h$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right) \cdot 5$

b) Verwendet wird die Formel $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ mit $G = F$. Die Höhe durch B auf F entspricht der kürzesten Verbindung von B zu einem Punkt in der Ebene, in der auch F liegt.

Also entspricht $h = d(B, H)$.

Das Volumen wurde in a) bereits berechnet und kann verwendet werden.

Aufgabengruppe 2

1.) siehe AG 1

2.) $H_k: 3k x_1 - 2x_2 - 6k = 0$; $k > 0$

a) SP mit x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$

in H_k: $3k x_1 - 6k = 0 \quad | + 6k$

$3k x_1 = 6k \quad | : 3k$

$\underline{\underline{x_1 = 2}} \quad \Rightarrow S_{x_1}\, \underline{(2|0|0)}$ ✓

(unabhängig von k)

$H_k \parallel x_3$-Achse $\Rightarrow \vec{n}_{H_k} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$

$\begin{pmatrix} 3k \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$ ✓

b) Verwende die Spurpunkte:

SP mit x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$

$-2x_2 - 6k = 0 \quad | + 6k$

$-2x_2 = 6k \quad | : (-2)$

$x_2 = -3k \qquad S_{x_2}(0|-3k|0)$

SP mit x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$

$-6k = 0$ ↯ allgemein nicht erfüllt

$H_k: \vec{x} = \underset{\text{SP mit } x_1\text{-Achse}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda \cdot \underset{H_k \parallel x_3\text{-Achse}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + \mu \cdot \underset{S_{x_2} S_{x_1}}{\begin{pmatrix} 0-2 \\ -3k-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}}$

$H_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3k \\ 0 \end{pmatrix}$

Teil B – Aufgabengruppe 1

$K_1\,(0|4|0)$; $K_2\,(0|0|0)$; $K_3\,(3|0|0)$; $K_4\,(3|4|0)$

$S_1\,(0|6|2{,}5)$; $S_2\,(0|0|3)$; $S_3\,(6|0|2{,}5)$

$1\,LE \mathrel{\hat=} 1\,m$

a) $E: \vec{x} = \vec{S_1} + \lambda\, \overrightarrow{S_1S_2} + \mu \cdot \overrightarrow{S_1S_3}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 \\ 3-0 \\ 0+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$x_1 + x_2 + 12x_3 - (0 + 6 + 30) = 0$$

$$E: \underline{\underline{x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0}}$$

b) $$A_\Delta = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{9 + 9 + 1296} \approx 18{,}1 \; (m^2)$$

Eine zusätzliche Sicherung ist also nicht notwendig.

c) $\overrightarrow{S_1K_1}$ liegt in der x_2x_3-Ebene

S_2 liegt ebenfalls in dieser Ebene

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{S_2S_2'}$ liegt ebenfalls in dieser Ebene, da $\overrightarrow{S_2S_2'} \parallel \overrightarrow{S_1K_1}$ und damit liegt S_2' auf der x_2-Achse.

d) $S_3'(6|2|0)$

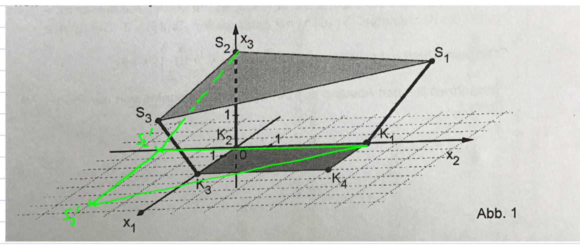


Abb. 1

Es ist mehr als die Hälfte beschattet.

e) Boden: x_1x_2-Ebene $\Rightarrow$ $B: x_3 = 0$

$$\cos(\varphi) = \left| \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_B}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_B|} \right|$$

$$= \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+144} \cdot \sqrt{1}} \right| = \left| \frac{12}{\sqrt{146}} \right| = \frac{6\sqrt{146}}{73}$$

$\Rightarrow \varphi = 6{,}7° < 8°$ $\Rightarrow$ Abfließen ist nicht gesichert.

f) Pythagoras: $r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r - h)^2$

$$r^2 = (0{,}25)^2 + (r - 0{,}05)^2$$

$$r^2 = 0{,}0625 + r^2 - 0{,}1 \cdot r + 0{,}0025$$

$$r^2 = 0{,}065 + r^2 - 0{,}1 \cdot r \quad | - r^2$$

$$0 = 0{,}065 - 0{,}1\,r \quad | + 0{,}1\,r$$

$$0{,}1r = 0{,}065 \quad | : 0{,}1$$

$$\underline{\underline{r = 0{,}65 \; (m)}}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (3r - h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (0{,}5\,dm)^2 \cdot (3 \cdot 6{,}5\,dm - 0{,}5\,dm)$$

$$= \frac{19}{12}\pi \approx 4{,}97\,dm^3 = \underline{\underline{4{,}97\,\ell}}$$

Aufgabengruppe 2

Untergrund : $x_1 x_2$ - Ebene

$1 LE \hat{=} 1m$

$P_1(0|0|0)$; $P_2(5|10|0)$

$A(3|0|2)$; $B(0|3|2)$; $E(6|0|0)$; $F(0|6|0)$

$R(5|7|3)$; $T(2|10|3)$

a) $\vec{M_1} = \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B})$; $\vec{M_2} = \frac{1}{2}(\vec{E}+\vec{F})$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1,5\\1,5\\2\end{pmatrix} \quad \Big| \quad = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix}3-1,5\\3-1,5\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,5\\1,5\\-2\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{1,5^2+1,5^2+(-2)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Länge $l = 1,2 \cdot \frac{\sqrt{34}}{2} = \underline{\underline{3,50\,m}}$

b) $L : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0-6\\0-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\-9\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$L: \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - (6+0+6) = 0$$

$$L: \underline{\underline{2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0}}$$

c) Trapez : $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$, also $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{EF}$

$$\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} \quad ; \; k = \frac{1}{2} \checkmark$$

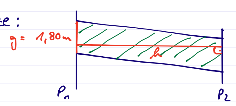
d) $\cos(\varphi) = \left| \frac{\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{4+4+9}\sqrt{1}} \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{17}} \right| \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 43,3°}}$

e) Pfähle stehen senkrecht auf Untergrund

Plattform 1 hat Höhe 2 (m)

x_3 - Koordinate von A und B

Skizze :



Parallelogrammfläche

$A = g \cdot h$

h = Abstand der Pfähle !

$h = \sqrt{5^2+10^2+0^2} = \underline{\underline{5\sqrt{5}\,m}}$

$A = 1,80\,m \cdot 5\sqrt{5}\,m = 9\sqrt{5}\,m^2 \approx \underline{\underline{20,1\,m^2}}$

f) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}5\\10\\h-2\end{pmatrix}$

$$RT : \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$g \cap RT : \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}5\\10\\h-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}5\\10\\h-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$5\lambda = 5 - 3\mu \quad (I)$$

$$10\lambda = 7 + 3\mu \quad (II)$$

$$(h-2)\lambda = 1 \quad (III)$$

aus (I) : $\lambda = 1 - \frac{3}{5}\mu$ (I')

in (II) : $10\left(1 - \frac{3}{5}\mu\right) = 7 + 3\mu$

$$10 - 6\mu = 7 + 3\mu \quad |+6\mu \; |-7$$

$$3 = 9\mu \quad |:9$$

$$\underline{\underline{\mu = \frac{1}{3}}} \quad \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

in (III): $(h-2) \cdot \frac{4}{5} = 1 \quad |:\frac{4}{5}$

$$h - 2 = \frac{5}{4} \quad |+2$$

$$\underline{\underline{h = \frac{13}{4}}}$$

$\Rightarrow$ Punkt $P(5|10|\frac{13}{4})$

Abstand : $\frac{13}{4} - 3 = \underline{\underline{0,25\,m}}$

Alternativ :

d (P; Ebene RTS)